

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:30



φροντιστήρια
ΠΟΥΚΑΜΙΣΑΣ

Ο ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΟΣ ΟΜΙΛΟΣ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Θέμα Α

A₁. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 111

A₂. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 104

A₃. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 128

A₄. α) Ι β) Ι γ) Ι δ) ΙΙ ε) ΙΙ

Θέμα Β

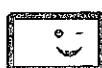
$$g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}, Dg = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \ln x, Dh = (0, +\infty)$$

$$B_1. D_f = D_{goh} = \left\{ \begin{array}{l} x \in Dh \\ h(x) \in Dg \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{array} \right\} = (0, +\infty)$$

$$f(x) = (goh)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$

$$\text{Άρα } f(x) = \frac{4 - x^2}{x}, x > 0$$



$$B_2. \ i) f'(x) = \left(\frac{4-x^2}{x} \right)' = \frac{-2x \cdot x - (4-x^2) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} = \frac{-(x^2 + 4)}{x^2} < 0 \text{ στο } (0, +\infty)$$

Επομένως η f είναι γνησιώς φύγουσα στο $(0, +\infty)$

$$ii) \frac{4-n^2}{4-e^2} > \frac{n}{e} \stackrel{4-e^2 < 0}{\implies} \frac{4-n^2}{n} < \frac{4-e^2}{e} \implies f(n) < f(e)$$

$$\begin{matrix} f \downarrow \\ \implies n > e \text{ παν τοχύει} \end{matrix}$$

B₃. Η f είναι συνεχής στο $D_f = (0, +\infty)$ ως προς

κατακόρυφη ασύμπτωτη

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[(4-x^2) \frac{1}{x} \right] = +\infty \text{ αφού}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (4-x^2) = 4 > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, x > 0 \text{ αρα} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Επομένως στο $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{\frac{x}{1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+4}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (-1)x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4-x^2}{x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4-x^2+x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 = B$$

Εποκένως η $\sigma_{\text{εγιά}} = -x$ είναι πλήγια ασυμπτωτικής στη $+\infty$

$$\text{B4. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{\text{UV}}(1+x^2)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{\text{UV}}(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}}$$

$$\left| \frac{\sigma_{\text{UV}}(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}} \right| = \frac{|\sigma_{\text{UV}}(1+x^2)|}{\left| \frac{4-x^2}{x} \right|} \leq \frac{1}{\left| \frac{4-x^2}{x} \right|} = \frac{x}{-4+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

$$-\frac{x}{-4+x^2} \leq \frac{\sigma_{\text{UV}}(1+x^2)}{f(x)} \leq \frac{x}{-4+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ΠΡΙΓΓΗΡΙΟ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{\text{UV}}(1+x^2)}{f(x)} = 0$
ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x}{x^2-4} \right) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Θέμα Α

$$\Delta_1. \text{ Έστω } g(x) = \frac{f(x)-2x}{x-1}, \quad x \neq 1$$

Τότε $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = l \in \mathbb{R}$

$$f(x)-2x = g(x)(x-1) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-1) + 2x$$

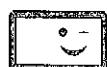
$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (g(x)(x-1) + 2x) = l \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\text{όπου } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k \right) =$$

$$= \ln 1 - 1 + k = k - 1.$$

$$\text{Άρα } k - 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{k = 3}$$

$$\text{Άρα } f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3, \quad x \in (0, 2).$$



$$\Delta_2. f'(x) = \frac{1}{2-x} \cdot (2-x)' + \frac{1}{x^2} =$$

$$= -\frac{1}{2-x} + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x^2} =$$

$$= \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)}, x \in (0, 2)$$

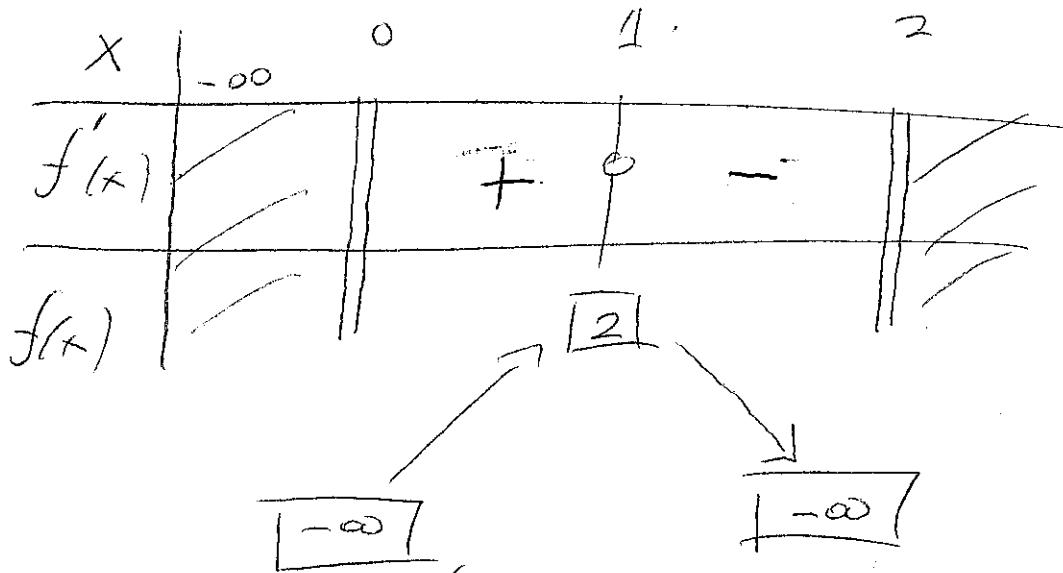
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)} = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ή } x = -2 \text{ απόριτρη}$$

Oi pijo kai zo proionto zw f'(x) tis tis tis

za 810627019 zw kovozovida kai za zonika
dikotikata zw f daxiono naiv napokatikou

nivak?



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty.$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(2-x) = \ln 2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \right) = -\infty$$

$$\text{γιατί } \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty. \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

• Διαδοχικά $\Delta_1 = (0, 2]$ ή $f(+)$ είναι
ωνεχής και \uparrow .

$$\text{Άρα } f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(2) \right] = (-\infty, 2].$$

$0 \in f(\Delta_1)$. Άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 2) : f(x_1) = 0$.

Ενειδική $f \uparrow$ στο Δ_1 , το x_1 είναι ισορροπητικό.

• Διαδοχικά $\Delta_2 = [1, 2)$ ή $f(+)$ είναι
ωνεχής και \downarrow

$$\text{Άρα } f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), f(1) \right] = [-\infty, 2].$$

$0 \in f(\Delta_2)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in (1, 2) : f(x_2) = 0$

Ενειδική $f \downarrow$ στο Δ_2 , το x_2 είναι ισορροπητικό.

Τέλος, υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1, x_2 :$ $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.

Τα οποία είναι πήγες της $f(+)$.

$$x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow$$

$$2-x_1 > 2-1 \Rightarrow 2-x_1 > 1 \Rightarrow \ln(2-x_1) > 0.$$

$$\text{όκος } f(x_1) = 0 \Rightarrow \ln(2-x_1) - \frac{1}{x_1} + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{x_1} = \ln(2-x_1) + 3 > 3 \text{ αφού } \ln(2-x_1) > 0$$

$$\text{β' τρόπος: } f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{5}{3} - 3 + 3 = \ln \frac{5}{3} > 0.$$

$$\begin{array}{l} \text{Αρχ } x_1 < \frac{1}{3} \\ \boxed{\begin{array}{l} f(x_1) = 0 \text{ λα } f \uparrow \text{ στο } [x_1, \frac{1}{3}] \\ \text{Αρχ } x_1 < \frac{1}{3}. \end{array}} \end{array}$$

Δ_3 . Η $f(x)$ είναι:

• ουεχής στο $[x_1, \frac{1}{3}]$

• παρεχωγή στη στο $(x_1, \frac{1}{3})$.

Άνω στο Θ.Μ.Τ., υπάρχει $\xi \in (x_1, \frac{1}{3}) \subseteq (0, 1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Εποκέριση κλίσης της f στο $x_0 = 1$

$M(\xi, f(\xi))$ είναι

$$\lambda_\varepsilon = f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{\text{για } x \in (0, 2)}.$$

$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$. Από f' , από το ξ κοντά προς 2 , f είναι λεπτή.

Δι. i) Αστρού F , \Leftrightarrow παραγωγής της f είναι λεπτή.

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \quad x \in (0, 2)$$

Από υπόπτη $c \in \mathbb{R}$: $F(x) = G(x) + c$ ①

$$\text{για } x = x_1 \therefore ① \quad F(x_1) = G(x_1) + c \quad (\Rightarrow c = -G(x_1))$$

$$\text{για } x = x_2 \therefore ① \quad F(x_2) = G(x_2) + c \quad (\Rightarrow c = F(x_2)).$$

$$-G(x_1) = F(x_2) \quad (\Rightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0)$$

Opijaukt zu gwaipzenq:

$$H(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x, \\ x \in [x_1, x_2]$$

H H(A) eival:

- Gwexis gzo $[x_1, x_2]$ os npaigeis gwtawv.
- $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0$.

Y(0,7) 0

$$H(x_1) = \cancel{x_1 F^{\circ}(x_1)} + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 =$$

$$= x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 < 0$$

$$H(x_2) = x_1 F(x_2) + \cancel{x_2 G(x_2)} - x_1 - x_2 + 2x_2 =$$

$$= x_1 F(x_2) - x_1 + x_2 =$$

$$= -x_1 G(x_1) - x_1 + x_2 > 0$$

$$\text{由定義: } f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(1)] \cup [f(x_2), f(1)] = \\ = [0, 2] \cup [0, 2] = [0, 2]$$

又 $f(x) > 0$, 且 $\forall x \in (x_1, x_2)$.

$\therefore G'(x) = f(x) > 0$. 又 $G \uparrow$ 在 $[x_1, x_2]$

又 $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) = 0$.

Ano zo Θ -Bolzano, n eziowen $H(x) = 0$

Exa zo, $\partial X \neq \emptyset$ kia pjd $\theta \in (x_1, x_2)$.

Aroka $H'(x) = x_1 f'(x) + x_2 g'(x) + 2 =$

$$= x_1 f(x) + x_2 g(x) + 2 =$$

$$= (x_1 + x_2) f(x) + 2 > 0, \text{ kia } \theta \in (x_1, x_2)$$

Apa $H(x) \uparrow$ $\theta \in (x_1, x_2)$,

dpx n pjd kovaldilu.