ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2023

ΜΑΘΗΜΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΩΡΑ ΑΝΑΡΤΗΣΗΣ

10:30

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 111

Α2. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 104

Α3. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 128

Α4. α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

$$g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \ln x \quad D_h = (0, +\infty)$$

Β1. $$D_f = D_{g\circ h} = \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{cases} = \begin{cases} x > 0 \\ \ln x \in \mathbb{R} \end{cases} = (0, +\infty)$$

$$f(x) = (g\circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}, \; x > 0$$

Άρα $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}, \; x > 0$

B2. i) $f'(x) = \left(\frac{4-x^2}{x}\right)' = \frac{-2x\cdot x-(4-x^2)\cdot 1}{x^2}$

$= \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-(x^2+4)}{x^2} < 0$ στο $(0,+\infty)$

Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

ii) $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \overset{4-e^2<0}{\Longleftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e)$

$\overset{f \downarrow}{\Leftrightarrow} \pi > e$ που ισχύει

B3. Η f είναι συνεχής στο $D_f=(0,+\infty)$ ως ρητή

κατακόρυφη Ασύμπτωτη

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[(4-x^2)\frac{1}{x}\right] = +\infty$ αφού

$\lim_{x\to 0^+}(4-x^2) = 4>0$

$\lim_{x\to 0^+} x = 0$, $x>0$ άρα $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$

Επομένως η $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{\frac{x}{1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+4}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(-1)x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0=\beta$$

Επομένως η ευθεία ε: $y=-x$ είναι πλάγια ασύμπτωση της C_f στο $+\infty$

Β4. $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}}$$

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{\frac{4-x^2}{x}}\right|=\frac{|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)|}{\left|\frac{4-x^2}{x}\right|}\le\frac{1}{\left|\frac{4-x^2}{x}\right|}=\frac{x}{-4+x^2}$$ αφού $x\to+\infty$

$$-\frac{x}{-4+x^2}\le\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\le\frac{x}{-4+x^2}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{x^2-4}\right)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=-\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\xRightarrow[\text{ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ}]{\text{ΚΡΙΤΗΡΙΟ}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=0$$

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $g(x) = \dfrac{f(x) - 2x}{x - 1}, \; x \neq 1$

Τότε $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \ell \in \mathbb{R}$

$f(x) - 2x = g(x)(x-1) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-1) + 2x$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \big(g(x)(x-1) + 2x\big) = \ell \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2.$

Όμως $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \left(\ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + k \right) =$

$= \ln 1 - 1 + k = k - 1.$

Άρα $k - 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{k = 3}$

Άρα $f(x) = \ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3, \; x \in (0, 2).$

Δ2. $f'(x) = \dfrac{1}{2-x} \cdot (2-x)' + \dfrac{1}{x^2} =$

$= -\dfrac{1}{2-x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x^2} =$

$= \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)}, \ x \in (0,2)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+x-2}{x^2(x-2)} = 0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$

$(x-1)(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -2$ απορρ.

Οι ρίζες και το πρόσημο της $f'(x)$ καθώς και τα διαστήματα της μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		1		2	
$f'(x)$		$\|\|$	$+$		0	$-$	$\|\|$	
$f(x)$		$\|\|$	$\boxed{-\infty} \nearrow$		$\boxed{2}$	$\searrow \boxed{-\infty}$	$\|\|$	

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty.$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(2-x) = \ln 2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$$

γιατί $\lim\limits_{x\to 2^-} \ln(2-x) \overset{u=2-x}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln u = -\infty.$ και

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$$

• Στο διάστημα $\Delta_1 = (0, 1]$ η $f(x)$ είναι συνεχής και $\uparrow$.

Άρα $f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \to 0^+} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$.

$0 \in f(\Delta_1)$. Άρα υπάρχει $x_1 \in (-\infty, 2) : f(x_1) = 0$.

Επειδή $f \uparrow$ στο Δ_1, το x_1 είναι μοναδικό.

• Στο διάστημα $\Delta_2 = [1, 2)$ η $f(x)$ είναι συνεχής και $\downarrow$

Άρα $f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \to 2^-} f(x), f(1)\right] = (-\infty, 2]$.

$0 \in f(\Delta_2)$. Άρα υπάρχει $x_2 \in (1, 2) : f(x_2) = 0$

Επειδή $f \downarrow$ στο Δ_2, το x_2 είναι μοναδικό.

Τελικά, υπάρχουν ακριβώς δύο x_1, x_2 : $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$.

Τα οποία είναι ρίζες της $f(x)$.

$x_1 < 1 \Rightarrow -x_1 > -1 \Rightarrow$

$2-x_1 > 2-1 \Rightarrow 2-x_1 > 1 \Rightarrow \ln(2-x_1) > 0.$

Όμως $f(x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(2-x_1) - \frac{1}{x_1} + 3 = 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{x_1} = \ln(2-x_1) + 3 > 3$ αφού $\ln(2-x_1) > 0$

Άρα $x_1 < \frac{1}{3}$

β' τρόπος: $f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\frac{5}{3} - \cancel{3} + \cancel{3} = \ln\frac{5}{3} > 0.$

$f(x_1) = 0$ και $f \uparrow$ στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

Άρα $x_1 < \frac{1}{3}$

Δ3. Η $f(x)$ είναι:

- συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$
- παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$.

Από το Θ.Μ.Τ, υπάρχει $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$:

$$f'(\xi) = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right) - \cancelto{0}{f(x_1)}}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

Επομένως η κλίση της f στο σημείο της

$M(\xi, f(\xi))$ είναι

$$\lambda_\varepsilon = f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1} \quad \text{για } x\in(0,2).$$

$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$. Άρα f' ↓, άρα το ξ μοναδικό.

Δ4. i) Αφού F, G παράγουσες της f έχουμε ότι

$$F'(x) = G'(x) = f(x), \quad x\in(0,2)$$

Άρα υπάρχει $c\in\mathbb{R}$: $F(x) = G(x) + c$ (1)

για $x = x_1$: (1) $\cancel{F(x_1)} = G(x_1) + c \Leftrightarrow c = -G(x_1)$

για $x = x_2$: (1) $F(x_2) = \cancel{G(x_2)} + c \Leftrightarrow c = F(x_2)$.

$$-G(x_1) = F(x_2) \Leftrightarrow F(x_2) + G(x_1) = 0$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$H(x) = x_1 \cdot F(x) + x_2 \cdot G(x) - x_1 - x_2 + 2x,$$

$$x \in [x_1, x_2]$$

Η $H(x)$ είναι:

- συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών.

- $H(x_1) \cdot H(x_2) < 0.$

γιατί:

$$H(x_1) = \cancel{x_1 F(x_1)}^{\,0} + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1 =$$

$$= x_2 G(x_1) + x_1 - x_2 \quad < 0$$

$$H(x_2) = x_1 F(x_2) + \cancel{x_2 G(x_2)}^{\,0} - x_1 - x_2 + 2x_2 =$$

$$= x_1 F(x_2) - x_1 + x_2 =$$

$$= -x_1 G(x_1) - x_1 + x_2 \quad > 0$$

γιατί: $f([x_1, x_2]) = [f(x_1), f(1)] \cup [f(x_2), f(1)] =$

$= [0, 2] \cup [0, 2] = [0, 2]$

Άρα $f(x) > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$.

όπως $G'(x) = f(x) > 0$. Άρα $G \uparrow$ στο $[x_1, x_2]$

Άρα $x_1 < x_2 \Rightarrow G(x_1) < G(x_2) = 0.$

Από το Θ. Bolzano, η εξίσωση $H(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (x_1, x_2).

Ακόμα $H'(x) = x_1 f'(x) + x_2 \cdot g'(x) + 2 =$

$= x_1 f(x) + x_2 f(x) + 2 =$

$= (x_1+x_2) \cdot f(x) + 2 > 0$, για κάθε $x \in (x_1, x_2)$

Άρα $H(x) \uparrow$ στο (x_1, x_2),

άρα η ρίζα μοναδική.