ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ – ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 1/6/2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) Γ ΕΠΑΛ

**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ**

## ΘΕΜΑ Α

**Α.1.** Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 31

**Α.2.** α) Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 65

β) Θεωρία, σχ. βιβλίο σελ. 86-87

**Α.3.** α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ

## ΘΕΜΑ Β

**Β.1.** $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3},\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=\left(\frac{1}{3}x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+(5x)'+\left(\frac{1}{3}\right)'=x^2-6x+5,\ x\in\mathbb{R}$$

**Β.2.** $f'(x)=x^2-6x+5,\ x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ όπου $\alpha=1,\ \beta=-6,\ \gamma=5$

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot5=36-20=16>0$$

$$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{16}}{2\cdot1}=\frac{6\pm4}{2},\quad x_1=\frac{6+4}{2}=\frac{10}{2}=5 \text{ και } x_2=\frac{6-4}{2}=\frac{2}{2}=1$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow x^2-6x+5>0\Leftrightarrow(x-1)(x-5)>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(5,+\infty)$$

$$f'(x)<0\Leftrightarrow x^2-6x+5<0\Leftrightarrow(x-1)(x-5)<0\Leftrightarrow x\in(1,5)$$

$$f(1)=\frac{1}{3}\cdot1^3-3\cdot1^2+5\cdot1+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot1-3\cdot1+5+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+2=\frac{2}{3}+\frac{6}{3}=\frac{8}{3}$$

$$f(5)=\frac{1}{3}\cdot 5^3-3\cdot 5^2+5\cdot 5+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot 125-3\cdot 25+25+\frac{1}{3}=\frac{125}{3}-75+25+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=42-50=-8$$

Η μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει από τον παρακάτω πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | | $\nearrow$ | ΤΟΠ.ΜΕΓ. | $\searrow$ | ΤΟΠ.ΕΛ. | $\nearrow$ | |

Η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=1$ το $f(1)=\frac{8}{3}$

και τοπικό ελάχιστο για $x=5$ το $f(5)=-8$.

**B.3.** $f(0)=\frac{1}{3}\cdot 0^3-3\cdot 0^2+5\cdot 0+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Ψάχνουμε την εξίσωση εφαπτομένης της $f$ στο σημείο της $\mathrm{M}\left(0,\frac{1}{3}\right)$, η οποία είναι της μορφής

$y=\alpha x+\beta$.

$\alpha=f'(0)=0^2-6\cdot 0+5=5$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης παίρνει την μορφή $y=5x+\beta$.

Το σημείο $\mathrm{M}\left(0,\frac{1}{3}\right)$ ανήκει στην ευθεία της εφαπτομένης, άρα οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Δηλαδή $\frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=\frac{1}{3}$.

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της $f$ στο σημείο της $\mathrm{M}\left(0,\frac{1}{3}\right)$ είναι $y=5x+\frac{1}{3}$.

**B.4.** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=f'(-1)=(-1)^2-6\cdot(-1)+5=1+6+5=12$